# INTRODUCCIÓN A LOS FRACTALES

**Carlos Alonso**

El término fractal, aparece con bastante frecuencia en diversas publicaciones técnicas y científicas. Y, es que estos objetos han pasado de ser meras curiosidades matemáticas a convertirse en herramientas muy válidas para la descripción de determinadas situaciones del entorno real. La geometría fractal, que se encarga del estudio de los objetos fractales, es una disciplina relativamente moderna, ya que se establece a finales de los setenta con los trabajos de **B. Mandelbrot** [6]. El propio término fractal, fue acuñado por este matemático franco-polaco, a partir del adjetivo latino *fractus* que significa roto o irregular.

## GEOMETRÍA FRACTAL

A finales del siglo XIX y durante el siglo XX, diversos matemáticos realizaron trabajos que permitieron posteriormente a Mandelbrot elaborar la geometría fractal. Así, matemáticos como Cantor, Koch y Sierpinsky, realizaron figuras geométricas a partir de fórmulas iterativas, que se caracterizaban por estar formadas por copias reducidas de sí mismas. Por otro lado, Gaston Julia, se dedicó al estudio de la convergencia del sistema $z=z^2+c$ en el plano complejo. El inglés **Lewis Fry Richardson** se planteó el problema de medir la longitud de una costa con una regla de longitud $L$. Observó que la longitud medida depende de la longitud de la regla de medida que se utilice, así conforme disminuye la regla, aumenta la longitud medida de la costa. Richardson observó la relación entre ambas longitudes del tipo $L(n)=n^{-a}$ , siendo $n$ la longitud de la regla.

Mandelbrot asociará todos estos trabajos con sus investigaciones propias en el centro de investigación Thomas J. Watson de IBM en Yorktown Heights (N.Y.), para crear el concepto de geometría fractal. Asociará el parámetro $a$ de la expresión obtenida por Richardson a una dimensión que denominará dimensión fractal. Esta dimensión será lo que permite definir un objeto como fractal, si dicha dimensión supera a la dimensión topológica del objeto. La geometría fractal estudiará y clasificará dichos objetos. Una clasificación habitual es en razón de la fórmula generadora [5]. Así tenemos fractales determinísticos o aleatorios, según provengan de un sistema determinístico o no. Los fractales determinísticos, a su vez, se dividen en lineales y no lineales.

**Figura 1.**

## DIMENSIÓN FRACTAL

El concepto de dimensión fractal desarrollado por Mandelbrot parte en gran medida del trabajo publicado en 1919 por **Felix Hausdorff**, donde plantea la idea de dimensión no entera.

Para entender el concepto de dimensión fractal comencemos por el caso de un segmento de longitud $L$. Si se divide por la mitad, se tienen dos segmentos iguales de longitud $L/2$. Si se realiza el mismo proceso para un cuadrado de lado $L$, se tendrán cuatro cuadrados de longitud $L/2$ y si se aplica a un cubo, serán 8 los cubos obtenidos. Es decir, se plantea una relación entre el número de elementos $a$ y el factor de escala $s$ del tipo $s^d=a$ donde $d$ es la dimensión del objeto, que se puede obtener como $d= log(a)/log(s)$. Se considera ahora el triángulo de Sierpinsky. Cada triángulo está formado por tres triángulos de lados mitad que el grande, por tanto el número de objetos $a$ es tres y el factor de escala $s$ es dos, por lo que si se calcula la dimensión se obtiene $log(3)/log(2)$, es decir, 1.585 [6].

Esta dimensión fraccionaria se puede interpretar de forma intuitiva: el triángulo de Sierpinsky ocupa el plano de una forma intermedia entre un segmento y una superficie. Este procedimiento no sólo es aplicable a figuras matemáticas sino que se puede emplear con objetos reales, tales como nubes, perfiles de costa, etc. Así, por ejemplo, el espacio ocupado por las arterias del cuerpo humano

*Carlos Alonso es proyectista en la Escuela Superior de Telecomunicaciones de la UPC.*

tiene una dimensión fractal de 2,7 [5].

## FRACTALES LINEALES

Los fractales lineales se caracterizan por describir un sistema dinámico lineal. Una vez se considera un determinado algoritmo generador la figura resultante se obtiene como la sucesión infinita de repeticiones de la regla sobre una imagen de partida. A este tipo de familia pertenecen el triángulo de Sierpinsky, el copo de nieve de Koch y la curva de Peano. Todas ellas se caracterizan por ser objetos sibsimilares en sentido fuerte: al tomar una porción del objeto, por pequeña que sea, contiene siempre una copia reducida de la figura original.

Una forma habitual de representar los fractales lineales es mediante los sistemas de función iterada, más conocidos como IFS, desarrollados por **Michel Barnsley** [1]. Un IFS no es sino la representación matricial de un conjunto fractal. Si se considera la siguiente transformación afín:

$$W(x,y)=(ax+by+e,\ cx+dy+f)$$

Esta transformación actúa sobre el plano Euclídeo realizando cambios de escala, giros y traslaciones tanto sobre $x$ como $y$ de cualquier conjunto situado en el plano.

Esta transformación $W$ se denomina contractiva cuando para cualquier par de puntos la distancia entre ellos es menor una vez han sido transformados.

Si se expresa la transformación de forma matricial:

$$W\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$$

Un sistema IFS es un conjunto de transformaciones todas ellas contractivas, por ejemplo las que se muestran en la tabla de la figura 3. Este el IFS correspondiente al triángulo de Sierpinsky. Para obtener la figura basta con asignar una probabilidad a cada una de las transformaciones y aplicarlas sucesivamente. En [1],[2] y [6] se tienen diversos ejemplos de sistemas IFS y programas para representarlos en un ordenador.

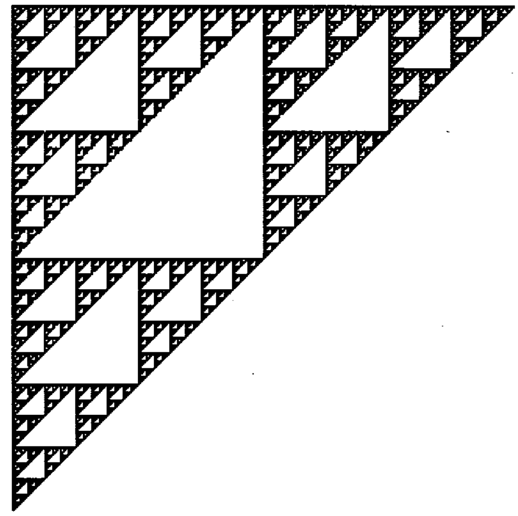

**Figura 2**.- Triángulo de Sierpinsky.

## FRACTALES NO LINEALES

Los fractales no lineales, como su nombre indica, son la representación de sistemas dinámicos no lineales. De entre toda la variedad de no linealidades existentes, destacan los fractales de tipo cuadrático. Uno de los precursores de la teoría fractal, **Gaston Julia**, da nombre a toda una familia de objetos fractales cuadráticos. Todos ellos se caracterizan por tener la misma fórmula generadora $z=z^2+c$, aplicada al plano complejo. Al transformar mediante esta fórmula diversos puntos para un valor concreto de $c$ se observa que hay puntos que convergen a valores finitos, mientras que otros escapan al infinito. El conjunto de Julia es la frontera entre esas dos regiones de puntos, los convergentes y los divergentes. El parámetro $c$ es el que caracteriza la forma concreta del conjunto. Algunos valores producen figuras conexas, mientras que otros originan conjuntos inconexos, hasta formar una especie de nube de polvo, que se denomina conjunto de **Cantor**.

El fractal cuadrático de la figura 6 es, seguramente, el fractal más conocido de todos. Se le conoce como **conjunto de Mandelbrot**, en honor a su descubridor. A pesar de la controversia sobre si Mandelbrot es o no su verdadero descubridor[2], suya ha sido la labor de divulgación de no únicamente este conjunto, sino de toda la geometría fractal. El conjunto de Mandelbrot parte también de la expresión $z=z^2+c$, pero en esta ocasión aplicada siempre sobre el origen, esto es, $z=0$. Para cada valor del parámetro c se comprueba si las iteraciones convergen o si tien-

| *a* | *b* | *c* | *d* | *e* | *f* |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.5 | 0 | 0 | 0.5 | 1 | 1 |
| 0.5 | 0 | 0 | 0.5 | 50 | 1 |
| 0.5 | 0 | 0 | 0.5 | 50 | 50 |

**Figura 3**.- Sistema IFS (*Iterated Function System*) del triángulo de Sierpinsky.

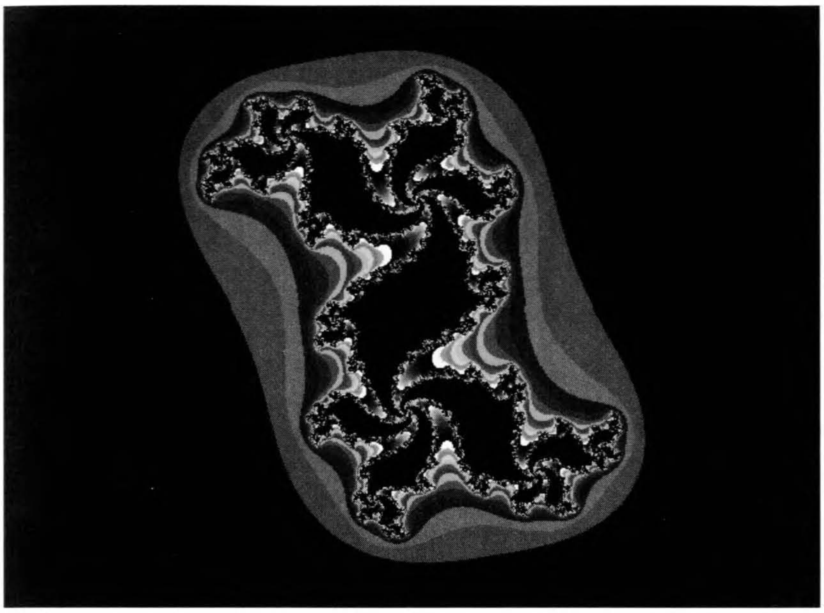

**Figura 4.**

den hacia el infinito. El resultado es una figura enormemente compleja, que además, es el conjunto de todos los puntos *c* del plano complejo que dan lugar a conjuntos de Julia conexos [6]. Por tanto, se puede considerar al conjunto de Mandelbrot como un clasificador de conjuntos de Julia. Aunque el conjunto de Mandelbrot no es estrictamente sibsimilar, como puede serlo el triángulo de Sierpinsky, si se amplía suficientemente se descubren infinidad de copias a lo largo de la frontera del conjunto.

## APLICACIONES

Como ya se mencionó al principio, parte del interés que suscitan los fractales es su capacidad para describir fenómenos del mundo real. Así, el propio Mandelbrot emplea la geometría fractal para estudiar fenómenos físicos como las turbulencias [6]. Un campo donde los fractales han encontrado gran aceptación es el campo de las imágenes digitales, donde se emplean tanto para la generación de imágenes artificiales [7], como en la compresión y análisis de imágenes reales[4]. Otras aplicaciones se han desarrollado para diversos ámbitos como, por ejemplo, la síntesis musical [3].

## REFERENCIAS


[1] Barnsley, M. F: *Fractals Everywhere* . Boston 1988. Academic Press.

[2] Barrallo Calonge, Javier: *Geometría fractal. Algorítmica y representación*. Ed. Anaya Multimedia 1993.

[3] Gadner, Martin: "Música blanca y música parda, curvas fractales y fluctuaciones del tipo 1/f". Investigación y Ciencia (Junio 1978) 104-113.

[4] Jacquin, A: "Fractal Image Coding. A review". Proc. of IEEE vol.81 nº10 (Octubre 1993) 1451-1464.

[5] Junger, Peitgen, Saupe: "El lenguaje de los fractales". Investigación y Ciencia (Octubre 1990) 46-57.

[6] Mandelbrot, B: *Los objetos fractales*. Ed. Tusquets 1988.

[7] Peitgen, Ritcher: *The Beauty of Fractals*. Berlin 1986. Springer Verlag.


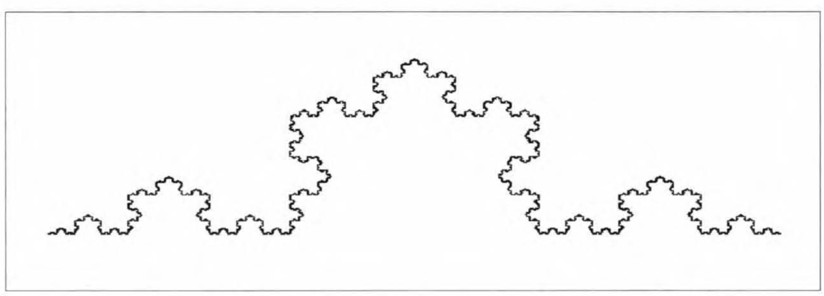

**Figura 5.**

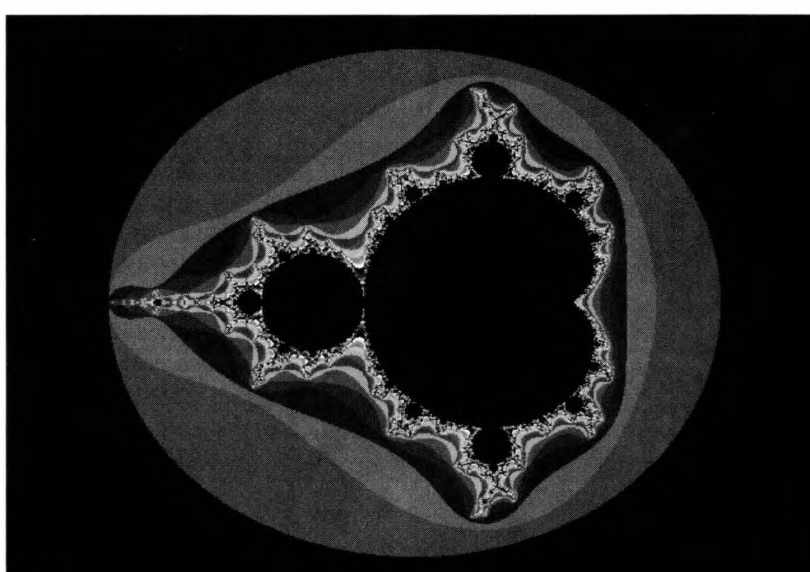

**Figura 6**.- Conjunto de Mandelbrot.